PART2　正多角形

2　1辺の長さが1の正六角形 ABCDEF において，辺 BC の中点を G とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とする。

(1)　$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{FG}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　点 H を辺 DE 上の点とする。$\overrightarrow{AH}$ と $\overrightarrow{FG}$ が垂直であるとき，$\overrightarrow{AH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。また，線分 DH の長さを求めよ。

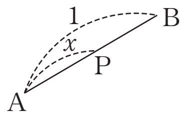
(3)　(2)のとき AH と FG の交点を I とする。$\overrightarrow{AI}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

Point Pickup

正多角形に関する問題は，平行な線分に注目し，ベクトルを用いて解く方法がある。

線分 AB 上の点 P について，AB＝1，AP＝x とすると

$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}$ である。



第10講　PART2　確認問題

1辺の長さが1の正六角形 ABCDEF において，辺 AB を 3：1 に内分する点を G とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とする。

1 $\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{GE}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

$\overrightarrow{BC}=$ ア

$\overrightarrow{GE}=\dfrac{\text{イ}}{\text{ウ}}\vec{a}+\text{エ}\,\vec{b}$

［ア の選択肢］

① $2\vec{a}$　② $2\vec{b}$

③ $\vec{a}+\vec{b}$　④ $\vec{a}-\vec{b}$　⑤ $-\vec{a}+\vec{b}$

⑥ $\vec{a}+2\vec{b}$　⑦ $2\vec{a}+\vec{b}$

2 (1) 点 H を辺 BC 上の点とする。$\overrightarrow{AH}$ と $\overrightarrow{GE}$ が垂直であるとき，$\overrightarrow{AH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。また，BH の長さを求めよ。

$\overrightarrow{AH}=\dfrac{\text{オ}}{\text{カ}}\vec{a}+\dfrac{\text{キ}}{\text{カ}}\vec{b}$，BH $=\dfrac{\text{ク}}{\text{ケ}}$

(2) (1)のとき，直線 AH と GE の交点を I とする。$\overrightarrow{AI}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

$\overrightarrow{AI}=\dfrac{\text{コサ}}{\text{シス}}\vec{a}+\dfrac{\text{セ}}{\text{シス}}\vec{b}$

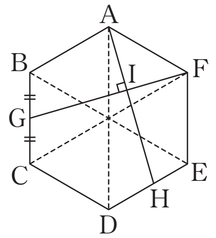
PART2　正多角形

2　1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF において，辺 BC の中点を G とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とする。

(1)　$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{FG}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　点 H を辺 DE 上の点とする。$\overrightarrow{AH}$ と $\overrightarrow{FG}$ が垂直であるとき，$\overrightarrow{AH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。また，線分 DH の長さを求めよ。

(3)　(2)のとき AH と FG の交点を I とする。$\overrightarrow{AI}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



(1)　$\overrightarrow{AD}=2\vec{a}+2\vec{b}$

$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AF}=\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})-\vec{b}=\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

(2)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120°=1\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

DH$=x$ とおくと，BA：DH$=1:x$ であるから　$\overrightarrow{DH}=x\overrightarrow{BA}=-x\vec{a}$

よって　$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}=2\vec{a}+2\vec{b}-x\vec{a}=(2-x)\vec{a}+2\vec{b}$

$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{FG}$ より　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{FG}=0$

$$\{(2-x)\vec{a}+2\vec{b}\}\cdot\left(\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)=0$$

すなわち　$\{(2-x)\vec{a}+2\vec{b}\}\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=0$

$$(6-3x)|\vec{a}|^2+(x+4)\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=0$$

$$6-3x+(x+4)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-2=0\qquad x=\frac{4}{7}$$

よって　$\overrightarrow{AH}=\frac{10}{7}\vec{a}+2\vec{b}$，DH$=\frac{4}{7}$

(3)　$\overrightarrow{AI}=k\overrightarrow{AH}$ (k は実数) とおくと

$$\overrightarrow{AI}=k\left(\frac{10}{7}\vec{a}+2\vec{b}\right)=\frac{10}{7}k\vec{a}+2k\vec{b}\ \cdots\cdots ①$$

また，GI：IF$=s:(1-s)$ とおくと

$$\overrightarrow{AI}=(1-s)\overrightarrow{AG}+s\overrightarrow{AF}=(1-s)\left(\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)+s\vec{b}=\frac{3-3s}{2}\vec{a}+\frac{1+s}{2}\vec{b}\ \cdots\cdots ②$$

①，②より　$\dfrac{10}{7}k\vec{a}+2k\vec{b}=\dfrac{3-3s}{2}\vec{a}+\dfrac{1+s}{2}\vec{b}$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は１次独立であるから

$$\frac{10}{7}k=\frac{3-3s}{2},\quad 2k=\frac{1+s}{2}$$

$$s=\frac{8}{13},\quad k=\frac{21}{52}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{15}{26}\vec{a}+\dfrac{21}{26}\vec{b}$

第10講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：③，イ：1，ウ：4，エ：2

[解説]

正六角形ABCDEFの中心をOとすると

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\vec{a}+\vec{b}$$ [A]

$$\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AG}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OE})-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

$$=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{b})-\frac{3}{4}\vec{a}=\frac{1}{4}\vec{a}+2\vec{b}$$

[A]　2つのベクトルの和や差を用いて

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

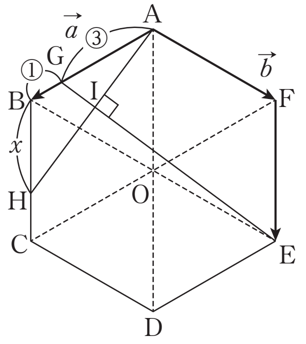
のようにベクトルを「分割」し，$\vec{a}$，$\vec{b}$ または，これらに平行なベクトルで表すことができる。

2

[正解] オ：5，カ：3，キ：2，ク：2，ケ：3，

コサ：15，シス：19，セ：6

[解説]



(1)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ より

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ=1\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

BH $=x$ とおくと，BC：BH $=1:x$ であるから

$$\overrightarrow{BH}=x\overrightarrow{BC}=x(\vec{a}+\vec{b})=x\vec{a}+x\vec{b}$$ [B]

よって

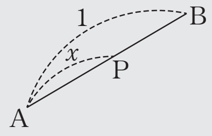
$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}=\vec{a}+x\vec{a}+x\vec{b}$$

$$=(x+1)\vec{a}+x\vec{b}$$

$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{GE}$ より　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{GE}=0$

[B]　線分AB上の点Pについて，AB $=1$，AP $=x$ とすると

$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}$



ここで，$\overrightarrow{\mathrm{GE}}=\dfrac{1}{4}\vec{a}+2\vec{b}$ より

$$\left\{(x+1)\vec{a}+x\vec{b}\right\}\cdot\left(\frac{1}{4}\vec{a}+2\vec{b}\right)=0$$

$$\left\{(x+1)\vec{a}+x\vec{b}\right\}\cdot\left(\vec{a}+8\vec{b}\right)=0$$

$$(x+1)|\vec{a}|^2+(9x+8)\vec{a}\cdot\vec{b}+8x|\vec{b}|^2=0 \quad \text{[C]}$$

$$(x+1)+(9x+8)\times\left(-\frac{1}{2}\right)+8x=0$$

[C]　$s,\ t,\ u,\ v$ を実数とすると
$(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot(u\vec{a}+v\vec{b})$
$=su|\vec{a}|^2+(sv+tu)\vec{a}\cdot\vec{b}+tv|\vec{b}|^2$

ゆえに　$x=\dfrac{2}{3}$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{5}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}}$，$\boldsymbol{\mathrm{BH}=\dfrac{2}{3}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=k\overrightarrow{\mathrm{AH}}$（$k$ は実数）とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=k\left(\frac{5}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)=\frac{5}{3}k\vec{a}+\frac{2}{3}k\vec{b}\ \cdots\cdots①$$

また，GI：IE $=s:(1-s)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AG}}+s\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

$$=(1-s)\times\frac{3}{4}\vec{a}+s(\vec{a}+2\vec{b})$$

$$=\left(\frac{s}{4}+\frac{3}{4}\right)\vec{a}+2s\vec{b}\ \cdots\cdots②$$

①，②より

$$\frac{5}{3}k\vec{a}+\frac{2}{3}k\vec{b}=\left(\frac{s}{4}+\frac{3}{4}\right)\vec{a}+2s\vec{b}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立であるから

$$\frac{5}{3}k=\frac{s}{4}+\frac{3}{4},\quad \frac{2}{3}k=2s$$

ゆえに　$s=\dfrac{3}{19}$，$k=\dfrac{9}{19}$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{15}{19}\vec{a}+\dfrac{6}{19}\vec{b}}$